Vom unauffällig Unendlichen zum auffällig Unendlichen

F. Schweiger(Institut für Didaktik
der Naturwissenschaften der Universität Salzburg)

1. Einleitung

Ziel dieses Vortrages ist es, einige Erwägungen anzustellen, die über das Unendliche (in der Mathematik) reflektieren, genauer über die Frage, welche Rolle der Verwendung bzw. dem Vorkommen unendlicher Mengen zukommt. Es solle der Frage nachgegangen werden, wo die Unendlichkeit von Mengen gewissermaßen so nebenbei,eben "unauffällig" bleibt und wo sie Unterschiede in Argumentation und Betrachtungsweise erzwingt. Dabei ist stets auf Gegenstände des Unterrichts an allgemeinbildenden Schulen geachtet worden, sodaß schwierige Fragen der Mengenlehre oder Grundlagenfragen hier nicht behandelt werden.
Auf den Einfluß, den die Brunersche Hypothese (in der hier verkürzt wiedergegebenen Formulierung Wittmanns: "Der Unterricht ist in jedem Fach auf die fundamentalen Ideen auszurichten" "Die Grundideen eines Faches können jedem Kind auf der Grundlage der Denkmittel in entsprechend einfacher Form vermittelt werden", siehe [4], p. 67) auf die Gestaltung dieses Vortrages genommen hat, sei hingewiesen; ebenso haben mich Freudenthals Ideen einer didaktischen Phänomenologie (siehe [3]) beieinflußt.

2. Mengen

Die elementare, spielerische Mengenlehre, nämlich die Mengenalgebra, ist leicht zu verstehen und mit Recht kann sie in geeigneter Form in der Grundschule begonnen werden. Es geht um Durchschnitt, Vereinigung und Restmengenbildung, die enaktiv und ikonisch repräsentierbar und bewältigbar sind(Torspiele, Legebäume, strukturiertes Material...). Venndiagramme dienen zur Veranschaulichung von Beziehungen

zwischen Mengen (und nur bedingt zur Veranschaulichung von Mengen). Dabei kommt man stets mit endlichen Mengen aus. Dies ist kein Zufall, denn in den Axiomensystemen der Mengenlehre muß man die Existenz unendlicher Mengen eigens fordern. Die Übertragung der im Umgang mit endlichen Mengen erworbenen Regeln der Mengenalgebra auf unendliche Mengen ist ein (meist unbemerkter) Transfer. Schwierigkeiten im Umgang mit Mengen müssen nicht mit "Unendlich" gekoppelt sein. Der Beweis, daß eine Abbildung von der Potenzmenge 2^A in die Menge A nicht injektiv ist, belegt dies. Es ist übrigens die Bildung der Potenzmenge (eine "Menge von Mengen"), wo zumeist begriffliche Schwierigkeiten auftauchen.
Gehen wir noch ein wenig der Frage nach: Was ist eine Menge? Es ist bekannt, daß die Cantorsche "Definition" nur deiktischen Charakter hat und wohl notwendig haben muß. "Menge" ist ein Grundbegriff wie "Raum", "Zeit", "Figur",..., die im Laufe einer langen Denkentwicklung erworben werden. Etwas verkürzt könnte man sagen: "Menge ist das, was sich jemand unter Menge vorstellt". Es ist nämlich gar nicht wichtig, ob jemand "Menge" mehr oder minder explizieren kann, sondern ob man mit Mengen umgehen kann. "Menge" ist ein operationaler Begriff.

3. Vorspiele

Die Mengenbildung ist bekanntlich mit dem Zahlbegriff eng verknüpft: Beide melden alsbald ein "Unendlich" an. Auch wenn man im Bereich der endlichen Mengen bleibt, so gibt es immerhin schon unendlich viele endliche Mengen. Wenn es eine Menge von 1000 Äpfeln gibt, so eine Menge von 1001 Äpfeln. Es ist aber auch eine Menge von 10^6 oder 10^{20} oder 10^{100} Äpfeln denkbar (obgleich es soviele Äpfel im ganzen Universum nicht zu geben scheint). Gerade die Zehnerpotenzen führen uns leichtfüßig in ein Reich großer Zahlen (und Mengen), die nur mehr denkbar, aber nicht mehr vorstellbar sind. Vor allem dann nicht, wenn wir uns erinnern, daß der "natürliche" Zahlbegriff an das Abzählen (d.h. Erreichbarkeit der Zahl durch Abzählen) gebunden ist (und erst die Bündelung ein erstes Ausufern gestattet). Es ist übrigens wohl müßig, bei natürlichen Zahlen die Aspekte Kardinalzahl versus Ordinalzahl gegeneinander ausspielen zu wollen, da beide wohl ineinandergreifend erworben werden (wobei sprachliche Faktoren und der Spracherwerb selbst eine Rolle spielen). An die Tatsache, daß nur für endliche Mengen die Anzahl auch durch Abzählen gewonnen werden kann, sei erinnert. Schon abzählbar unendliche Mengen gestatten verschiedene (nicht isotone) Anordnungen: Man vergleiche die (natürliche) Anordnung in $\mathbb{N}$ (der Menge der natürlichen Zahlen) mit der Anordnung in $\mathbb{Z}$ (der Menge der ganzen Zahlen). Die Anordnung in $\mathbb{Z}$ ist so gewählt, daß $\mathbb{Z}$ ein geordneter Ring wird. Ein stabiles Schema (im Sinne Piagets) des "Anfangs", welches psychologisch tief verwurzelt erscheint(und auch in Religion und Philosophie seine Wirksamkeit entfaltet) legt es nahe, die ganzen Zahlen anders (teilweise) zu ordnen: 0 als kleinstes Element und nach rechts und links fortschreitend. Die Schüler, die $-1 < -3$ annehmen, richten sich nach diesem Schema.

Zum Umgang mit Mengen gehört auch die Verankerung in der Alltagssprache
Menge, Familie, Rudel, Haufen, Garbe,...
viel, wenig, mehr, weniger...
unendlich, ewig, zeitlos, fern... .

Hier geht es einerseits (wie übrigens in der Begriffsbildung selbst) um den Vorgang des Zusammenfassens zu einer Menge: wer zur Familie gehört, erscheint bestimmbar, das Rudel hat seine Grenzen, ein Haufen Erdäpfel unterscheidet sich vom Boden des Ackers, auf welchem er liegt, eine Garbe bündelt die gemähten Halme... . Oder es geht um Komparative, Vergleiche von Mengen, qualitativ, pränumerisch. Eine Menge Leute im Theater ist mehr als eine schwach besuchte Vorstellung, Zahlwörter präzisieren dies. Oder es geht um Umschreibungen sich anmeldender Unendlichkeiten.

4. Unendliche Mengen

Die mengenbildenden Regeln (Teilmengenbildung, Paarbildung, Mengenalgebra etc.) führen aus dem Bereich der endlichen Mengen nicht hinaus. Die Auffassung, $\mathbb{N}$ als Menge anzusehen, d.h. den Vorrat der natürlichen Zahlen den Regeln der Mengenbildung zu unterwerfen, ist ein gewaltiger Schritt (der sich übrigens für den Vorrat der Kardinalzahlen nicht wiederholen läßt!) Aber schon die Teilmengenbildung ergibt sodann eine Fülle neuer Mengen:

Die Menge aller geraden natürlichen Zahlen.

Die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch 9 teilbar sind.

Die Menge aller Primzahlen.

Die Menge aller Primzahlzwillinge

Die ersten beiden Mengen sind leicht als unendlich erkennbar, die dritte Menge hat Euklid als unendlich erkannt; ob die viertgenannte Menge unendlich ist, weiß man nicht.

Es sei hier erinnert, daß man unendliche Mengen stets nur "beschreibend" angeben kann und nie "aufzählend". Welche Menge ist denn wohl durch $A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ angegeben? Die Menge der geraden natürlichen Zahlen? Falsch geraten, ich habe damit die Menge der Werte des Polynoms

$$f(x) = \frac{x^4-10x^3+35x^2-2x+24}{24}$$

für $x \in \mathbb{N}$ "aufzählen" wollen (denn es ist $f(1)=2$, $f(2)=4$, $f(3)=6$, $f(4)=8$, allerdings $f(5)=11$).

Schwieriger ist es dann, Teilmengen als "neue Objekte" anzusehen: Die Menge der Restklassen (modulo m) ist eine Menge mit m Elementen, die aber selbst unendliche Mengen sind. Das Rechnen mit Kongruenzen vermeidet diese Auffassung, weswegen es vermutlich einfacher ist als das Rechnen mit Restklassen. Ein Weg (auf den gleich zurückgekommen wird), die Schwierigkeiten mit Restklassen zu verringern, ist es, Restklassen durch "endliche Objekte" zu veranschaulichen, etwa als Punkte eines n-Ecks (d.h. die Addition als Drehung zu deuten). Auch rationale Zahlen werden (üblicherweise) als unendliche Mengen definiert, nämlich als Menge äquivalenter ("wertgleicher") Paare: $(a,b) \sim (c,d)$ genau wenn $ad = bc$. Dabei wird das geordnete Paar (a,b) meist $\frac{a}{b}$ geschrieben. Es wäre für eine klare Begriffsbildung besser, für rationale Zahlen eigene Symbole einzuführen, etwa

$$[\tfrac{1}{2}] = \{\tfrac{a}{b}: 2a = b\} = \{\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{6}, \tfrac{4}{8}, \ldots\}.$$

Die "Didaktik der Bruchrechnung" hat die Aufgabe, Modelle und Methoden anzubieten, diesen Schritt klar und doch altersgemäß vollziehen zu helfen. Da aber eine rationale Zahl durch einen Punkt auf der Zahlengeraden veranschaulichbar ist, hat man eine gute Möglichkeit der Veranschaulichung durch "endliche Objekte", nämlich Punkte. Äquivalente Brüche sitzen alle über demselben Punkt!

Eine weitere - in letzter Zeit erneut umstrittene - Begriffsbildung ist der "freie Vektor", wobei es sogar zwei gleichwertige Definitionen mithilfe von Schiebungen gibt: Die Punktepaare (A,B) und (C,D) heißen äquivalent, wenn es eine Schiebung τ gibt mit $\tau A = B$ und $\tau C = D$ (oder: wenn es eine Schiebung σ gibt mit $\sigma A = C$ und $\sigma B = D$). Anschaulich: ein freier Vektor ist eine Klasse gleichlanger, gleichorientierter Pfeile. Jedenfalls ist dies eine unendliche Menge.

Schließlich ist zu erwähnen, daß die Modelle zur Konstruktion reeller Zahlen stets mit unendlichen Mengen arbeiten:

Dedekindsche Schnitte sind Paare unendlicher Teilmengen von $\mathbb{Q}$ (für eine Vereinfachung siehe Bürger-Schweiger [1]).

Bei Cauchyfolgen oder Intervallschachtelungen muß man Äuivalenzklassen mit unendlich vielen Elementen bilden, wobei der Begriff der unendlichen Folge (als Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$) schon eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ impliziert. Auch die Dezimalbrüche melden ein starkes "Unendlich" an (wobei hier der algorithmische Aspekt bzw. der Aspekt der fortgesetzten Zehntelung als Suchverfahren einer eigenen Betrachtung wert ist).

5. Exkurs in die Geometrie

Bekanntlich kann man (mit Hilfe des Auswahlaxioms) unendliche Mengen dadurch charakterisieren, daß man sagt: Eine Menge M ist endlich, wenn jede injektive Abbildung $f: M \to M$ surjektiv ist. Die Entdeckung, daß dies bei unendlichen Mengen anders ist, ist faszinierend und wird mit den bekannten Beispielen $n \mapsto 2n$ oder $n \mapsto n^2$ klargemacht. Auffallend selten findet man, daß diese Erkenntnis in der Geometrie ebenso auf der Hand liegt: Eine zentrische Streckung (mit Faktor $|\lambda|<1$) bildet eine Strecke oder eine Kreisscheibe auf eine echte Teilmenge bijektiv ab! Strecken, Gerade, Kurven etc. sind alles unendliche Punktmengen, ohne daß dieser Tatsache viel Gewicht beigemessen wird. Daß diese geometrischen Gebilde gewissermaßen als "endliche Objekte" anschaulich vorliegen (vgl. auch Fragen der Gestaltpsychologie), ist vielleicht ein Grund dafür. Kontraste, etwa Geometrie in einem ebenen Gitter oder endliche Geometrien wären hier hilfreich.

Die Auffassung geometrischer Gebilde als Mengen ist uralt. Unter den Namen Ortslinie oder geometrischer Ort aller Punkte wurde sie früher betrieben. Der Durchschnitt ist in der Geometrie übrigens besser beheimatet (Schnittpunkte, Schnittgerade; Schnittkurven, z.B. Kegelschnitte) als die Vereinigung(die Vereinigung von zwei Geraden ist, wenn man von der Deutung als zerfallender Kegelschnitt absieht, nichts Griffiges). Geradenbüschel, Kreisnetze, Scharen konfokaler Kegelschnitte, Kurvenscharen etc. stellen weitere Beispiele von Mengenbildungen dar, die hier (in der Punktmengenauffassung) zwanglos Mengen von Mengen sind.

Übrigens sollte man darauf hinweisen, daß die Auffassung geometrischer

Gebilde als Punktmengen (Teilmengen der Ebene oder des Raumes) nur bedingt praktisch ist: Ein Dreieck ist "mehr", nämlich drei Ecken , drei Seiten und eine Fläche.
Die Zerlegung von Polygonen in Dreiecke wird mühsam, wenn man über die Zuordnung der Ränder nachdenken muß etc.
Auf die interessanten empirischen Untersuchungen von Fischbein-Tirosh-Hess [2] bezüglich der Labilität einer "Intuition des Unendlichen" sei hingewiesen.

6. Unendlich viel ist nicht hinreichend viel

Ich möchte zuletzt noch auf die Erfahrung aufmerksam machen, daß "unendlich viel" noch lange nicht "hinreichend viel" bedeutet. Dies ist einerseits von den Zahlbereichen bekannt: Man erweitert $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$, um unbeschränkt subtrahieren zu können (und verliert dabei die Wohlordnung) oder $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$, um die Division auszudehnen (und verliert dabei die diskrete Ordnung) oder $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$, um algebraische Abgeschlossenheit zu erreichen (und verliert dabei die Ordnungsstruktur). Der Übergang von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$, der sehr stark geometrische Bezüge aufweist (die berühmte $\sqrt{2}$ oder die Benutzung der Vollständigkeit für Definition und Berechnung von Bogenlängen, Flächeninhalten und Rauminhalten), bedürfte eines eigenen Referates.
Die in der Mathematik so beliebte "Abschlußidee" (topologische Hülle, algebraischer Abschluß, Vervollständigung metrischer Räume, reflexive Räume als Abschluß der Dualität etc.) spiegelt ein Verlangen wieder, das Ausufern des Erweiterungsprozesses zu stoppen - was nicht immer gelingt.
In der Geometrie gibt es auch noch subtilere Beispiele, wo das "hinreichend viel" eigens gefordert werden muß, wie etwa beim Axiom von Pasch: Wenn eine Gerade g ein Dreieck auf der Seite AB in einem Punkt schneidet, so schneidet die Gerade die Seite BC oder die Seite

CA in einem weiteren Punkt. Beschränkt man sich auf Punkte mit ganzzahligen Koordinaten (ebenes Gitter), so sieht man sofort, daß hier eine Stetigkeitseigenschaft der Ebene drinnen steckt.

[1] H. Bürger-F. Schweiger: Einführung der reellen Zahlen.
Didaktik der Mathematik Jg. 1 Heft 2 (1973), 98-108

[2] E. Fischbein-D.Tirosh-P. Hess: The Intuition of Infinity
Educational Studies in Mathematics 10 (1979), 3-40

[3] H. Freudenthal: Lernzielbestimmung im Mathematikunterricht =
Der Mathematikunterricht
Jg. 23 Heft 3 (1977)

[4] E. Wittmann: Grundfragen des Mathematikunterrichts
Vieweg, Braunschweig 1975^3.